

Matematik opgaver

Matematik opgaver	1
Reducer	2
Trigonometri	2
Opstil model	4
Regning med brøker	5
Procentregning	6
Modellering	7
Differentiation	7
Genkend grafer	10
Andengradsligninger	12
Parameterfremstilling	13
Cirkels ligning	15
Bestemmelse af forskrift	17
Integration	19
Monotoniforhold	21
Differentialligninger	22
Vektorer	24
Toppunkt	26
Andengradspolynomium	27
Længde af vektor i rummet	30
Prik/ skalarprodukt	31
Chi i anden	32
Planer i rummet	35
Funktioner med hjælpemidler	37
Optimering	38
Omdrejningsvolumen	40
Kugleudregning	42
Kvartilsæt og boksplot	43
Tegn grafer og bestem tidspunktet, hvor	46
Bestemmelse af tangent	48

Reducer

1. Vi ser, at der er tale om 1. kvadratsætning, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

$$(x + 3)^2 - 9 \text{ bliver altså } x^2 + 9 + 6x - 9 = x^2 + 6x$$

2. Vi ser, at der er tale om 3. kvadratsætning, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$(a - 4)(a + 4) + 16 - 4a \text{ bliver altså } a^2 - 16 + 16 - 4a = a^2 - 4a$$

3. Vi ser, at der er tale om 2. kvadratsætning, $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

$$(x - 9)^2 - 81 + 2x \text{ bliver altså } x^2 + 81 - 18x - 81 + 2x = x^2 - 16x$$

Trigonometri

4. Vi skal bestemme sidelængden C. Vi benytter pythagoras læresætning, som siger: Givet en retvinklet trekant, så er $a^2 + b^2 = c^2$. Vi indsætter i formlen og får $4^2 + 3^2 = c^2 \Leftrightarrow 25 = c^2 \Leftrightarrow c = 5$
5. Vi skal bestemme arealet af trekant ABC. Vi bruger formlen: $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$. I vores tilfælde bliver det: $T = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Arealet af trekant ABC er altså 6.
6. Givet trekant ABC og trekant ADE med sidelængderne AC=4, AD=6 og AE=10 og vinkel A= 50°. Vi skal bestemme sidelængde DE. Vi benytter først cosinusrelationerne til at bestemme $|DE|$. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Det vil sige: $|DE|^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos(50) = 58,865 \Leftrightarrow |DE| = \sqrt{58,865} = 7,67$
7. Vi skal bestemme vinkel E. Ud fra de andre oplysninger kan vi udregne vinkel E ved hjælp af cosinusrelationerne. $\cos(E) = \frac{7,67^2 + 10^2 - 6^2}{2 \cdot 7,67 \cdot 10} = 0,801 \Leftrightarrow E = \cos^{-1}(0,801) = 36,802^\circ$
8. Givet trekant ABC og trekant ADE med sidelængderne AE=3, BC=6 og AC=6. Vi skal bestemme længden af linjestykke DE. Vi ser, at de to trekanter ABC og ADE er ensvinklede og derfor ligedannede. Vi kan derfor udregne størrelsesforholdet k mellem de to trekanter. $k = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{6} = 0,5$. Vi kan derfra finde DE ud fra BC. $DE = BC \cdot k \Leftrightarrow DE = 6 \cdot 0,5 = 3$. Linjestykke DE er altså 3.
9. Vi skal nu bestemme arealet af trekant ABC. Vi nedfælder højden fra B_h. Vi kan nu bestemme højden fra B_h ved hjælp af pythagoras: $6^2 = 3^2 + B_h^2 \Leftrightarrow 25 = B_h^2 \Leftrightarrow B_h = 5$

Opstil model

10. 3000 udgør startværdien, hvor $f(0)$, da $f(0) = 3.000 \cdot 0.94^0 = 3.000$ og 0,94 udgør fremskrivningsfaktoren, altså den faktor hvormed det samlede antal ikke-smartphonebrugere stiger hvert år.

11. Vi opstiller modellen, $f(x) = 3531 \cdot 1,03^x$, hvor $f(x)$ er den samlede omsætning (målt i millioner) til tiden x (målt i antal år efter 2010).

12. Vi skal bestemme forskriften for den lineære funktion $y=ax+b$ gennem punkterne $P(1,4)$ og $Q(3,6)$. Vi benytter topunktsformlen, som siger

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, så a er altså $a = \frac{6-4}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$. a er altså i dette tilfælde 1. Vi kan nu udregne b . $ax + b = y \Leftrightarrow b = y_1 - ax_1$, så b er altså $b = 4 - 1 \cdot 1 = 3$. Så $b = 3$. Den samlede forskrift er altså $y=x+b$

Regning med brøker

13. Vi skal sortere brøkerne i rækkefølge med den mindste først. Vi opstiller dem således:

$$\frac{18}{58} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{6}{5}$$

14. Vi skal bestemme x . For at dividere med brøker ganger man med den reciprokke (den omvendte), altså er $\frac{8}{4x} : \frac{2}{1}$ lig med $\frac{8}{4x} \cdot \frac{1}{2}$. Vi ganger derefter brøkerne med hinanden og får: $\frac{8 \cdot 1}{4x \cdot 2} = 52 \Leftrightarrow \frac{8}{8x} = 52 \Leftrightarrow x = 52$

15. Vi sætter de to brøker på fællesnævner. $\frac{5 \cdot 3}{42} = \frac{15}{42}$ og $\frac{1 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{7}{42}$ Vi udregner nu $\frac{42}{42} - \frac{15}{42} - \frac{7}{42} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$. Person C skal altså spise $\frac{10}{21}$ af den samlede pizza.

Procentregning

16. Det procentvise fald fra 150 til 120 er: $1 - \frac{120}{150} = 0,20 = 20\%$. For at stige til 150 skal skoen sættes op med $1 - \frac{120}{150} = 0,25 = 25\%$

Modellering

17. Vi skal gøre rede for, at kassens rumfang kan bestemmes som $16 \cdot b^3$.

En kasses rumfang beregnes som: $V = b \cdot l \cdot h$, hvor V er rumfang, b er bredde, l er længde og h er højde. Vi indsætter kassens mål og får: $4b \cdot 2b \cdot 2b = V \Leftrightarrow 16b^3 = V$. Det er hermed vist.

18. Vi skal beskrive figurens overfladeareal. Vi starter med at udregne kassens overfladeareal. $b \cdot b \cdot 5 = 5b^2$. Toppen af kassen kan udregnes som:

Kvadratet-kuglens areal + kuglens overfladeareal, altså $b^2 - 0,5^2 \cdot \pi + 4 \cdot \pi \cdot 0,5b^2$. Lagt sammen bliver figurens overfladeareal: $V = 5b^2 + b^2 - 0,5b^2 \cdot \pi + \pi \cdot 2b^2 = 6b^2 + \pi \cdot 1,5b^2$. Figurens overfladeareal kan altså beskrives som: $V = 6b^2 + \pi \cdot 1,5b^2$

19. Vi skal beskrive figurens rumfang givet ved x . Vi ser, at figuren består af 2 dele: en kube og en pyramide. Vi kan beregne kubens rumfang som:

$$V = x \cdot x \cdot x = x^3$$

Vi ved derudover, at en pyramides rumfang er givet ved:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G, \text{ hvor } G \text{ er arealet af grundfladen og } h \text{ er højden.}$$

Pyramidens højde finder vi ved hjælp af pythagoras læresætning:

$$x^2 = 0,5 \cdot x^2 + h^2 \Leftrightarrow 0,5x^2 = h^2 \Leftrightarrow x^2 = 2h^2$$

Vi sætter $x=1$ og får:

$$1^2 = 2 \cdot h^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7$$

Højden er altså lig med $0,7x$.

Vi kan derfra udregne rumfanget som:

$$V = x^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,7x \cdot x^2 = \frac{0,7}{3} \cdot x^6$$

Differentiation

20. Vi skal bestemme ligningen for tangententen til grafen for f gennem punktet $P(2, f(2))$. Vi benytter formelen: $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. For at benytte ligningen skal vi først kende $f(x_0)$ og $f'(x_0)$.

$$f(2) = 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 13 \cdot 2 - 17 = 8 - 28 + 26 - 17 = -11.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 13 \text{ og } f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + 13 = 12 - 28 + 13 = -3.$$

$$\text{Vi indsætter i formlen og får: } y = -3 \cdot (x - 2) - 11 = -3x + 6 - 11 = -3x - 5$$

Så ligningen for tangenten til grafen for f gennem punktet $P(2, f(2))$ er

$$y = -3x - 5$$

21. Vi skal bestemme ligningen for tangententen til grafen for f gennem punktet $P(1, f(-1))$. Vi benytter formelen: $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. For at benytte ligningen skal vi først kende $f(x_0)$ og $f'(x_0)$.

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + 5 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 10 = 2 + 5 + 6 + 10 = 23.$$

$$f'(x) = 8x^3 - 10x - 6 \text{ og } f'(-1) = 8 \cdot (-1)^3 - 10x - 6 = -8 + 10 - 6 = -4$$

$$\text{Vi indsætter i formlen og får: } y = -4 \cdot (x - 1) + 23 = -4x + 4 + 23 = -4x + 27$$

Så ligningen for tangenten til grafen for f gennem punktet $P(3, f(3))$ er

$$y = -4x + 27$$

22. Givet funktionen $f(x) = -3x^3 + 20x^2 - 12x + 3$. Vi skal bestemme ligningen for tangententen til grafen for f gennem punktet $P(3, f(3))$. Vi benytter formelen: $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. For at benytte ligningen skal vi først kende $f(x_0)$ og $f'(x_0)$.

$$f(3) = -3 \cdot 3^3 + 20 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 3 = -81 + 180 - 36 + 3 = 66$$

$$f'(x) = -6x^2 + 40x - 12 \text{ og } f'(3) = -6 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3 - 12 = -54 + 120 - 12 = 54$$

Vi indsætter i formlen og får: $y = 66 \cdot (x - 3) + 54 = 66x - 198 + 54 = 66x - 144$

Så ligningen for tangenten til grafen for f gennem punktet $P(3, f(3))$ er $y = 66x - 144$

23. Givet funktionen $f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 23x - 9$. Vi skal bestemme ligningen for tangenten til grafen for f gennem punktet $P(2, f(2))$. Vi benytter formlen: $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. For at benytte ligningen skal vi først kende $f(x_0)$ og $f'(x_0)$.

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 - 23 \cdot 2 - 9 = 16 + 48 - 46 - 9 = 9$$

$$f'(x) = 6x^2 + 24x - 23 \text{ og } f'(2) = 6 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 23 = 24 + 48 - 23 = 49$$

Vi indsætter i formlen og får: $y = 49 \cdot (x - 2) + 9 = 49x - 98 + 9 = 49x - 89$

Så ligningen for tangenten til grafen for f gennem punktet $P(2, f(2))$ er $y = 49x - 89$

Genkend grafer

24. Givet et koordinatsystem med 3 grafer. Vi skal gøre rede for, hvilken af de tre funktioner $f(x) = 0,6^x$, $g(x) = x + 4$ og $h(x) = x^{1,15}$, der er afbilledet med hvilken graf.

Vi ser, at $h(x)$ må være b, da den skærer y-aksen i punktet $(0,4)$ samt har konstant stigning.

Funktion $f(x)$ må være afbilledet med graf a, da den er aftagende og ikke er under y-aksen.

Funktion $h(x)$ må derved være c, da den starter i $0,0$ samt er stigende.

25. Givet et koordinatsystem med 3 grafer. Vi skal gøre rede for, hvilken af de tre funktioner $f(x) = 0,5x + 2$, $g(x) = x^{0.5}$ og $g(x) = x^2$, der er afbilledet med hvilken graf.

Vi ser, at funktion $f(x)$ må være afbilledet med grafen b, da den har en lineær vækst samt skærer y-aksen i punktet $(0,2)$.

Funktionen $g(x)$ må derved være afbilledet med grafen a, da den kun findes i 1. kvadrant samt har en markant mindre stigning end funktion $h(x)$, da er afbilledet med graf c.

26. Givet et koordinatsystem med 3 grafer. Vi skal gøre rede for, hvilken af de tre funktioner $f(x) = -2x + 2$, $g(x) = x^{-0.5}$ og $h(x) = 3^x$, der er afbilledet med hvilken graf.

Vi ser, at funktion $f(x)$ må være afbilledet med grafen b, da den har en aftagende lineær vækst samt skærer y-aksen i punktet $(0,2)$.

Funktionen $g(x)$ må derved være afbilledet med grafen a, da den kun findes i 1. kvadrant, samt har x- og y-aksen som asymptoter.

Funktion $h(x)$ har en kraftig eksponentiel stigning og starter i punktet $(0,1)$ på y-aksen og må derfor være afbilledet ved graf c.

27. Givet et koordinatsystem med 3 grafer. Vi skal gøre rede for, hvilken af de tre funktioner $f(x) = x^2$, $g(x) = 1.3^x \cdot 4$ og $h(x) = 0.5^x$, der er afbilledet med hvilken graf.

Vi ser, at funktion $f(x)$ må være afbilledet med graf a, da den starter i punktet $0,0$ og har en eksponentiel stigning.

Desuden må funktion $g(x)$ være afbilledet med graf c, da den skærer y-aksen i punktet $(0,4)$.

Afslutningsvist må funktionen $h(x)$ være afbilledet med graf b, da den har en konstant positiv værdi på y-aksen samt har x-aksen som asymptote.

Andengradsligninger

28. Givet andengradsligningen $x^2 + 25x = 0$. Vi skal bestemme skæringspunkterne med førsteaksen for ligningens funktion. Vi bestemmer diskriminanten d. $d = b^2 - 4ac = 25^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 625$. Da $d > 0$ må der være 2 svar: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-25 \pm \sqrt{625}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -25$. Skæringspunkterne er altså $x = 0 \vee x = -25$
29. Givet parablen med funktionen $f(x) = 4x^2 + 2x - 1$. Vi skal bestemme koordinaterne til parablens toppunkt.
Vi benytter formlen for parablens toppunkt: $T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$. Vi udregner diskriminanten d. $d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 4 + 16 = 20$. Vi indsætter nu værdierne i formlen og får: $T = \left(\frac{-2}{8}, \frac{-20}{16}\right) = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-5}{4}\right)$. Parablenes toppunkt er altså $T = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-5}{4}\right)$
30. Givet funktionen $3x^2 - 6x + c = 0$. Vi skal bestemme c, så andengradsligningen har præcis 1 løsning. Vi benytter forskriften for diskriminanten d, da der når $d=0$ er 1 løsning. $d = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 0 \Leftrightarrow 36 - 12c = 0 \Leftrightarrow 36 = 12c \Leftrightarrow c = 3$. For at der er netop 1 løsning skal c altså være 3.
31. Givet funktionen $4x^2 + 8x + c = 0$. Vi skal bestemme c, så andengradsligningen har præcis 1 løsning. Vi benytter forskriften for diskriminanten d, da der når $d=0$ er 1 løsning. $d = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow (8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \Leftrightarrow 64 - 16c = 0 \Leftrightarrow 64 = 16c \Leftrightarrow c = 4$. For at der er netop 1 løsning skal c altså være 4.

Parameterfremstilling

32. Givet en ligning med ligningen: $4x-9y+2=0$. Vi skal opskrive linjens parameterfremstilling.

Vi aflæser linjens normalvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Derfor må retningsvektoren være: $\vec{r} = \hat{n} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vi kan nu finde en y-værdi ved at sætte $x=0$.

$$4 \cdot 0 - 9y + 2 = 0 \Leftrightarrow -9y = -2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{9}$$

Vi kan derfor bruge punktet: $(0, \frac{2}{9})$.

Parameterfremstillingen er derved: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

33. Givet to punkter på en linje, $A = (3,6)$ og $B = (7,1)$. Vi skal opskrive linjens parameterfremstilling.

Vi finder vektoren mellem de to punkter:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu bruge A som vores punkt. Derved er parameterfremstillingen for

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

34. Givet en linje l med parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Vi skal bestemme en parameterfremstilling for den linje m, der går gennem punktet P(3,7) og er vinkelret på l.

Vi ved, at en linje l, der går gennem punkterne x_0 og y_0 og har retningsvektoren $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ kan opskrives på parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{r}.$$

For at finde den parameterfremstillingen for m skal vi finde l's normalvektor:

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \hat{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vi indsætter denne værdi i parameterfremstillingen og får:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

35. Givet en linje l med parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in R$. Vi skal bestemme ligningen for den linje m, der går gennem punktet P(4,1) og er parallel med l.

Vi ved, at en linje l, der går gennem punkterne x_0 og y_0 og har

retningsvektoren $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ kan opskrives på parameterfremstillingen: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{r}$.

Ved at indsætte værdien for P i parameterfremstillingen fås: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi kan nu udregne linjens normalvektor, som er tværvektor til

retningsvektoren: $\hat{r} = \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \hat{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi kan nu indsætte normalvektoren samt det kendte punkt i linjens ligning:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow -3(x - 4) + 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow -3x + 12 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow -3x + y + 11 = 0$$

Ligningen for linjen m, der er parallel med linjen l og går gennem punktet P(4,1) er altså $-3x + y + 11 = 0$.

Cirkelns ligning

36. Givet ligningen $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 43 = 0$, som skal omskrives til cirkelns ligning. Vi ved, at cirkelns ligning er: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Vi kan herefter aflæse at a må være 8. Hvis vi følger anden kvadratsætning er $-2 \cdot 8 \cdot x = -16x$. På samme måde kan b aflæses til -2, efter første kvadratsætning. Vi omskriver herefter ligningen og får: $(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

37. Givet ligningen $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 43 = 0$, som skal omskrives til cirkelns ligning. Vi ved, at cirkelns ligning er: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Vi kan herefter aflæse at a må være -4. Hvis vi følger første kvadratsætning er $2 \cdot 4 \cdot x = 8x$. På samme måde kan b aflæses til 8. . Vi omskriver herefter ligningen og får: $(x + 4)^2 + (y - 8)^2 = 36$

38. Givet ligningen for en bestemt cirkel: $(x + 8)^2 + (y - 5)^2 = 81$. Vi skal bestemme radius samt koordinatsættet til cirkelns centrum.

Vi aflæser at radius er $r^2 = \sqrt{81} \Leftrightarrow r = 9$. Vi kan derudover aflæse koordinatsættet til følgende: a=-8 og b=5. Så koordinatsættet er C(-8,5).

39. Vi skal bestemme om linjen l: $y = 2x - 3$ skærer med cirklen C: $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 64$ og i givet fald hvor mange skæringspunkter den har.

Vi ved, at hvis afstanden fra centrum til cirkelperiferien er mindre end r, så er der 2 skæringspunkter, hvis afstanden er lig r er der 1 skæringspunkt og hvis den er større end r er der 0 skæringspunkter. Vi kan aflæse cirkelns centrum som værende (3,8) og radius som 8.

Vi benytter distanceformlen til at udregne antallet af skæringspunkter:

$$\text{dist}(C, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|2 \cdot 3 + (-3) - 8|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \approx 2,23$$
. Da $2,23 < 8$ er der 2 skæringspunkter.

40. Vi skal bestemme om linjen $l: y = -3x + 4$ skærer med cirklen

$C: (x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 25$ og i givet fald hvor mange skæringspunkter den har. Vi ved, at hvis afstanden fra centrum til cirkelperiferien er mindre end r , så er der 2 skæringspunkter, hvis afstanden er lig r er der 1 skæringspunkt og hvis den er større end r er der 0 skæringspunkter. Vi kan aflæse cirkelns centrum til $(4, -8)$ og radius til 5. Vi benytter

distanceformlen til at udregne antallet af skæringspunkter: $dist(C, l) =$

$$\frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-3 \cdot 4 + 4 - (-8)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1}} = \frac{|0|}{\sqrt{10}} = 0. \text{ Da } 0 < 5 \text{ er der 2 skæringspunkter.}$$

Bestemmelse af forskrift

41. Givet en tabel, der viser sammenhængen mellem vægten af en type ko i kg og dens brystkasse omfang i cm. Denne sammenhæng kan beskrives ved hjælp af funktionen $f(x) = b \cdot a^x$. Vi skal bestemme tallene a og b samt deres betydning.

Vi indsætter tabellen i Excel og laver lineær regression. Excel svarer, at $y = 5,3915x - 455,22$. Ud fra dette må a altså være 5,3915 og b må være -455,22. Her udgør a hældningskoefficienten, altså hvor meget koens vægt stiger, når dens brystkasses omfang stiger med 1 cm og b udgør den forventede vægt ved et omfang på 0 cm.

Vi skal beregne $f(170)$. $f(170) = 5,3915 \cdot 170 - 455,22 = 461,335 \text{ kg}$. En ko med et brystkasseomfang på 170cm vejer altså 461,335 kg.

42. Givet en eksponentiel funktion på forskriften $y = b \cdot a^x$ og punkterne P(1,12) og R(3,192). Vi skal bestemme funktionens forskrift. Vi bestemmer

først a: $a = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}} = \frac{3-1}{\sqrt{\frac{192}{12}}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = 2$. Så a=2. Vi udregner herefter b.

$y_1 = b \cdot a^{x_1} \Leftrightarrow b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{12}{2^1} = 6$. Så a=2 og b=6 og funktionens forskrift er dermed: $y = 6 \cdot 2^x$

43. Givet et datasæt, der kan beskrives funktionen $y = b \cdot x^a$. Vi indsætter tabellen i Excel og laver potentiel regression. Excel svarer: $y = 5x^2$. Derved må a=2 og b=5.

44. Givet en eksponentiel funktion på forskriften $y = b \cdot a^x$ og punkterne P(2, 6,25) og Q(4, 39,0625) Vi skal bestemme funktionens forskrift. Vi

bestemmer først a: $a = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}} = \frac{4-2}{\sqrt{\frac{39,0625}{6,25}}} = \frac{2}{\sqrt{6,25}} = 2$ så a=2. Vi udregner

herefter b. $y_1 = b \cdot a^{x_1} \Leftrightarrow b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{6,25}{2^2} = 1$. Så a=2 og b=1.

45. Givet potensfunktionen $y = b \cdot x^a$ og punkterne P(2,32) og Q(5,500). Bestem a og b. Vi bestemmer først a: $a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} = \frac{\log(500) - \log(32)}{\log(5) - \log(2)} = 3$. Vi kan herefter bestemme b: $y_1 = b \cdot x^a \Leftrightarrow b = \frac{y_1}{x^a} = \frac{32}{2^3} = 4$. Så a=3 og b=4.

Integration

46. Givet funktionen f , som er bestemt ved $f(x) = 7x^3 + 6x^2 + 4x + 4$. Grafen for f afgrænser med ligningen $x=4$ i 1. kvadrant en punktmængde M . Vi skal bestemme arealet af M . Vi beregner det bestemte integral fra 0 til 4 af $f(x)$:

$$M = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 (7x^3 + 6x^2 + 4x + 4) dx = \left[\frac{7}{4} \cdot x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x \right]_0^4 = \frac{7}{4} \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 0 = 624$$

47. Givet funktionen f , som er bestemt ved $f(x) = 2 \cdot \sin(1 + x)$. Grafen for f afgrænser med det første skæringspunkt mellem grafen og førsteaksen en punktmængde M i første kvadrant. Vi skal bestemme arealet af M . Vi bestemmer først skæringspunktet med x -aksen. Vi beregner dette på Geogebra og får svaret $x=2,14$. Skæringspunktet med x -aksen er altså i punktet $(2,14,0)$. Vi kan herefter udregne det bestemte integral fra 0 til 2,14 af $f(x)$:

$$M = \int_0^{2,14} f(x) dx = \int_0^{2,14} (2 \cdot \sin(1 + x)) dx = [-2 \cdot \cos(1 + x)]_0^{2,14} = -2 \cdot \cos(1 + 2,14) - (-2 \cdot \cos(1 + 0)) = 3,08$$

48. Givet de to funktioner $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^2$. Vi skal bestemme arealet af den punktmængde M der afgrænses af skæringspunktet mellem de to grafer. Vi aflæser, at $f(x)$ må være den øverste graf og at $h(x)$ derved må være den nederste. Vi beregner først skæringspunkterne: $\sqrt{x} = x^2$. Vi ser, at resultatet er 1. Vi udregner derfor følgende udtryk: $M = \int_0^1 f(x) -$

$$g(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 0 = 0,333$$

49. Givet de to funktioner $f(x) = x + 3$ og $g(x) = x^3 + 1$. Vi skal bestemme arealet af den punktmængde M , der afgrænses af skæringspunktet mellem de to grafer og andenaksen. Vi aflæser, at $f(x)$ må være den øverste graf og at $h(x)$ derved må være den nederste. Vi sætter først de to grafer lig med hinanden for at bestemme skæringspunkterne.

$$x^3 + 1 = x + 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow x = 1,52$$

Vi kan derefter beregne $M = \int_0^{1,53} f(x) - g(x) dx \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{1,53} (x + 3 - -x^3 + 1) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3x - \frac{1}{4}x^4 + x \right]_0^{1,52} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1,52^2 + 3 \cdot 1,52 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1,52^4 + 1,52 \right) - 0 = 2,86 \end{aligned}$$

Monotoniforhold

50. Givet funktionen $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3x + 2$. Vi skal bestemme monotoniforholdene for f . Vi beregner først $f'(x)=0$. $f'(x) = x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Herfra laver vi et fortegnsskema: $f'(2)=-1$ og $f'(4)=1$. Vi kan derfra konkludere, at:
- f er aftagende i intervallet $] - \infty; 3]$
 - f er voksende i intervallet $[3; \infty[$
 - f har globalt minimum i $x=3$
51. Givet funktionen $f(x) = x^3 - 12x + 1$. Vi skal bestemme monotoniforholdene for f . Vi beregner først $f'(x)=0$. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Herfra laver vi et fortegnsskema: $f'(0)=-12$, $f'(3)=15$, $f'(-3)=15$. Vi kan derfra konkludere, at:
- f er voksende i intervallerne $] - \infty; -2]$ og $[2; \infty[$
 - f er aftagende i intervallet $[-2; 2]$
52. Givet funktionen $f(x) = x^3 - 4x + 2$. Vi skal bestemme monotoniforholdene for f . Vi beregner først $f'(x)=0$. $f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm 1,15$. Herfra laver vi et fortegnsskema: $f'(0)=-4$, $f'(2)=8$, $f'(-2)=8$. Vi kan derfra konkludere, at:
- f er voksende i intervallerne $] - \infty; -1,15]$ og $[1,15; \infty[$
 - f er aftagende i intervallet $[-1,15; 1,15]$
53. Givet funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5 = 0$. Vi skal bestemme monotoniforholdene for f . Vi beregner først $f'(x)=0$. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 6x \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. Herfra laver vi et fortegnsskema: $f'(-1)=9$, $f'(1)=-3$, $f'(3)=9$. Vi kan derfra konkludere, at:
- f er voksende i intervallerne $] - \infty; -0]$ og $[2; \infty[$
 - f er aftagende i intervallet $[0; 2]$

Differentialligninger

54. Vi skal undersøge, om $y=4x-4$ er en løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 4$.

Vi integrerer på begge sider af differentialligningen og får: $\int \frac{dy}{dx} = \int 4 \Leftrightarrow y = 4x + c$. Hvis vi sætter $c=-4$ ser vi, at $y=4x-4$ er en løsning til differentialligningen.

55. Givet funktionen f , der er løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 5y - x^2$ og hvis graf f går gennem punktet $P(3,5)$. Vi skal bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Vi aflæser ved hjælp af punktet P at x -værdien er 3 og y -værdien er 5. Vi x - og y -værdierne i differentialligningen og får: $\frac{dy}{dx} = 5 \cdot 5 - 3^2 = 16$. Vi kan derefter indsætte alle værdierne i formlen for tangenten til grafen for f :
 $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = 16(x - 3) + 5 = 16x - 48 + 5 = 16x - 43$
Ligningen for tangenten til grafen for f i punktet P er derved $y=16x-43$.

56. Vi skal undersøge om $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \ln(x) + x + 1$$

Vi gør brug af reglen, der siger, at:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Derved bliver:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \cdot \ln(x) + x^2 \cdot (\ln(x))' + (x)' = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} + 1 \\ &= 2x \cdot \ln(x) + x + 1 \end{aligned}$$

Vi ser derved at $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \ln(x) + x + 1$$

57. Givet en type bambus', hvis højde h (i meter) som funktion af tiden t (i døgn) opfylder differentialligningen $\frac{dh}{dt} = 0,75h \cdot (12 - h)$, som til tiden $t=0$ er 0,2 meter høj. Vi skal bestemme bambussens højde efter 5 døgn.

Vi ser, at der er tale om en differentialligning på formen: $y' = ay \cdot (M - y)$. Denne type differentialligning har den fuldstændige løsning:

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$$

Vi indsætter værdierne fra differentialligningen og får:

$$h = \frac{12}{1 + c \cdot e^{-0,75 \cdot 12 \cdot t}} = \frac{12}{1 + c \cdot e^{-9t}}$$

Vi ved, at når $t=0$ er $h=0,2$. Vi kan derfor indsætte de to værdier:

$$\begin{aligned} 0,2 &= \frac{12}{1 + c \cdot e^{-9 \cdot 0}} = \frac{12}{1 + c \cdot e^0} = \frac{12}{1 + c} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,2 &= \frac{12}{1 + c} \Leftrightarrow 0,2 \cdot (1 + c) = 12 \Leftrightarrow 1 + c = \frac{12}{0,2} = 60 \Leftrightarrow c = 59 \end{aligned}$$

Vi kan nu indsætte denne værdi i formlen og få:

$$h = \frac{12}{1 + 59 \cdot e^{-9 \cdot 5}} = 5,026$$

Bambussen er altså 5,026 meter høj efter 5 døgn.

45) f er en løsning til differentialligning.

Vektorer

58. Givet 2 vektorer a og b, som er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ c \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$. Vi skal bestemme den værdi for c, der medfører at a og b er parallelle. Vi ved, at $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$. Vi finder derved den værdi for c, der medfører at determinanten er lig med 0.

$$\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -c & 7 \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 - c \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow -21 + 3c = 0 \Leftrightarrow c = -7$$

c skal altså være -7 for at de to vektorer er parallelle.

59. Givet 2 vektorer a og b, som er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9,5 \\ -10,5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} c \\ 21 \end{pmatrix}$. Vi skal bestemme den værdi for c, der medfører at a og b er parallelle. Vi ved, at $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$. Vi finder derved den værdi for c, der medfører at determinanten er lig med 0.

$$\begin{vmatrix} -9,5 & c \\ -10,5 & 21 \end{vmatrix} = -9,5 \cdot 21 - (-10,5) \cdot c = 0 \Leftrightarrow -199,5 + 10,5c = 0$$

$\Leftrightarrow 10,5c = 199,5 \Leftrightarrow c = -19$. c skal altså være -19 for at de to vektorer er parallelle.

60. Givet 2 vektorer a og b, som er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ c \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestem den værdi for c, der medfører at a og b er ortogonale. Vi ved, at $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$. Vi finder derved den værdi for c, der medfører at skalarproduktet er lig med 0.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-10) + c \cdot 6 = 0$$

$\Leftrightarrow -30 + 6c = 0 \Leftrightarrow 6c = 30 \Leftrightarrow c = 5$. c skal altså være 5 for at de to vektorer er ortogonale.

61. Givet 2 vektorer a og b, som er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ c \end{pmatrix}$ Bestem den værdi for c, der medfører at a og b er ortogonale. Vi ved, at $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$. Vi finder derved den værdi for c, der medfører at skalarproduktet er lig med 0.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ c \end{pmatrix} = 4 \cdot (-10) + 2 \cdot c = 0$$

$\Leftrightarrow -40 + 2c = 0 \Leftrightarrow 2c = 40 \Leftrightarrow c = 20$. c skal altså være 20 for at de to vektorer er ortogonale.

Toppunkt

62. Givet en parabel er graf for funktionen $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$. Vi skal bestemme koordinatsættet til parablens toppunkt. Vi benytter formen for parablens toppunkt: $T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$. Vi udregner diskriminanten d. $d = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 25 + 48 = 73$. Vi indsætter nu værdierne i formen og får: $T = \left(\frac{-5}{2 \cdot 4}, \frac{-73}{4 \cdot 4}\right) = \left(\frac{-5}{8}, \frac{-73}{16}\right)$. Parablens toppunkt er altså $T = \left(\frac{-5}{8}, \frac{-73}{16}\right)$
63. Givet en parabel er graf for funktionen $g(x) = -8x^2 - 2x + 3$. Vi skal bestemme koordinatsættet til parablens toppunkt. Vi benytter formen for parablens toppunkt: $T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$. Vi udregner diskriminanten d. $d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-8) \cdot 3 = 4 + 108 = 112$. Vi indsætter nu værdierne i formen og får: $T = \left(\frac{-(-2)}{2 \cdot 8}, \frac{-112}{4 \cdot 8}\right) = \left(\frac{2}{16}, \frac{-112}{32}\right)$. Parablens toppunkt er altså $T = \left(\frac{2}{16}, \frac{-112}{32}\right)$.
64. Givet en parabel er graf for funktionen $h(x) = -2x^2 - 4x + 6$. Vi skal bestemme koordinatsættet til parablens toppunkt. Vi benytter formen for parablens toppunkt: $T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$. Vi udregner diskriminanten d. $d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6 = 16 + 48 = 64$. Vi indsætter nu værdierne i formen og får: $T = \left(\frac{-(-4)}{2 \cdot (-2)}, \frac{-64}{4 \cdot (-2)}\right) = \left(\frac{4}{-4}, \frac{-64}{-8}\right) = (1, 8)$. Parablens toppunkt er altså $T = (1, 8)$
- $x_{rod1} = -3$ $x_{rod2} = 1$

Andengradspolynomium

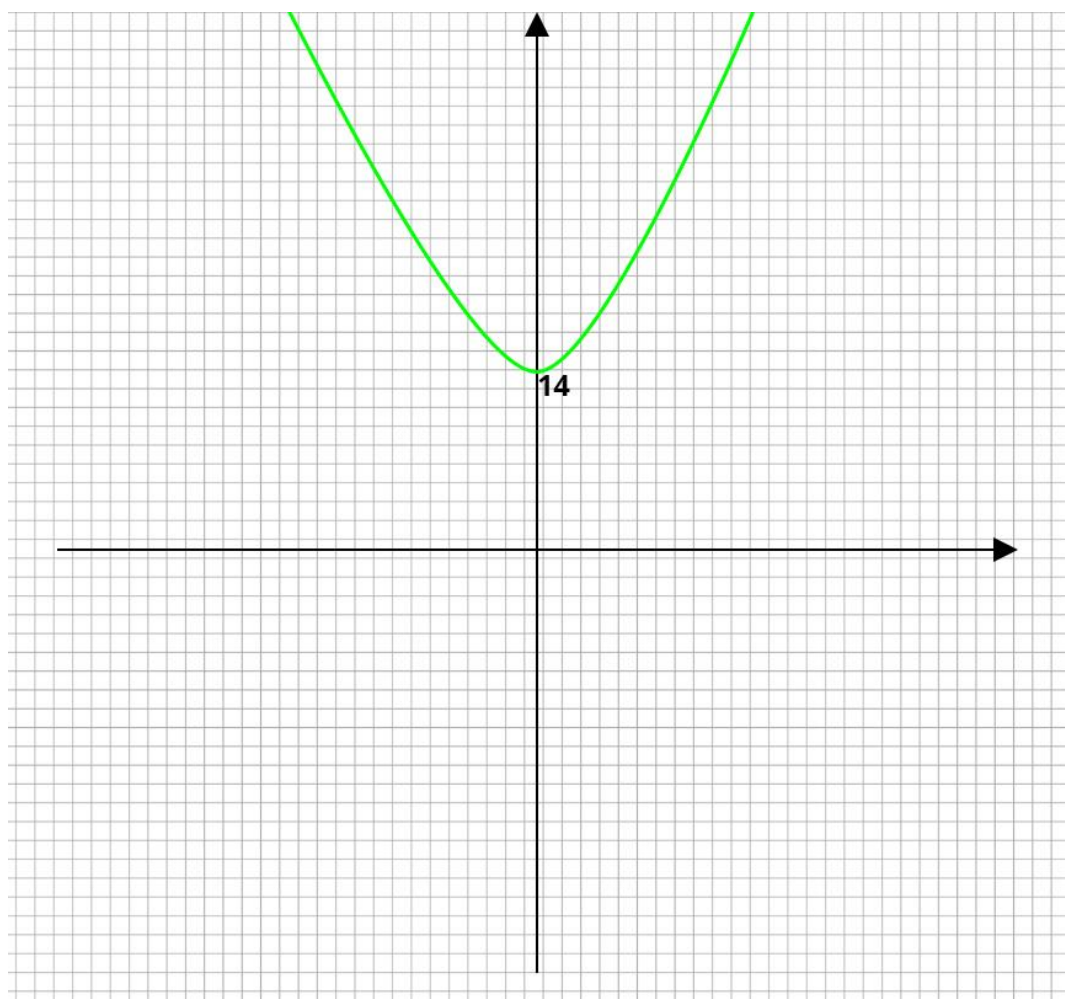
65. Vi skal skitsere andengradspolynomiummet givet ved $4x^2 - 5x + 14 = 0$ og forklare hvad tallene 4, 14 samt diskriminanten d har af betydning for grafen. For at kunne skitsere grafen korrekt tegner beregner vi først diskriminanten d , som er givet ved:

$$d = b^2 - 4ac \Leftrightarrow d = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 14 = -199$$

Vi kan derved aflæse at andengradspolynomiet har 0 rødder da $d < 0$.

Vi kan derudover se, at den i punktet $(0, f(0))$ har y -værdien 14, da det er skæringspunktet med y -aksen og at 4, altså $a > 0$, hvilket gør, at den er "glad".

Ud fra disse overvejelser kan vi skitsere grafen:



66. Vi skal skitsere andengradspolynomiummet givet ved $2x^2 + 7x + 6 = 0$ og forklare hvad tallene 2, 6 samt diskriminanten d har af betydning for grafen.

For at kunne skitsere grafen korrekt tegner beregner vi først diskriminanten d , som er givet ved:

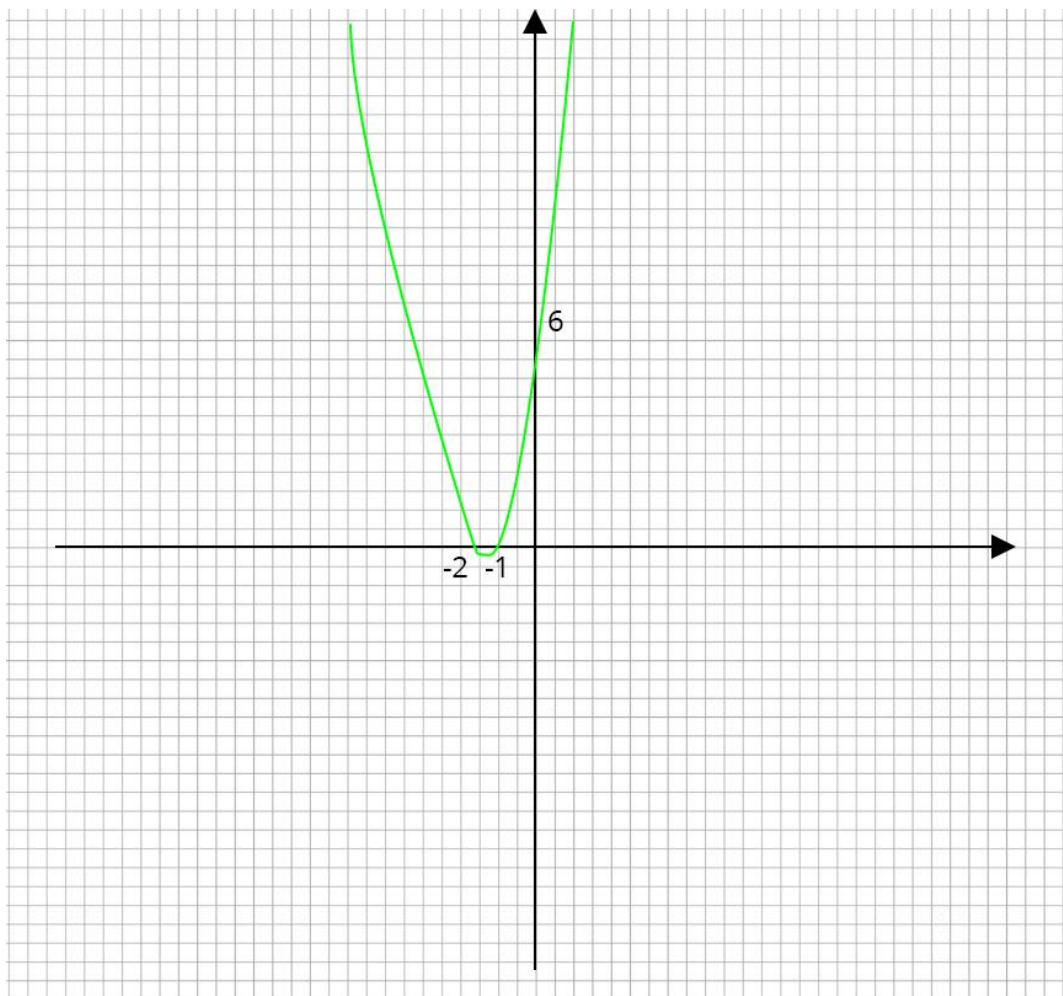
$$d = b^2 - 4ac \Leftrightarrow d = (7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1$$

Vi kan derved aflæse at andengradspolynomiet har 2 rødder, da $d > 0$. Vi kan nu finde de to rødder:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = \begin{cases} -2 \\ -1,5 \end{cases}$$

Vi kan derudover se, at den i punktet $(0, f(0))$ har y -værdien 6, da det er skæringspunktet med y -aksen og at 4, altså a , er større end 0, hvilket gør, at den er "glad".

Ud fra disse overvejelser kan vi skitsere grafen:



67. Vi skal skitsere andengradspolynomiummet givet ved $1x^2 + 8x + 16 = 0$ og forklare hvad tallene 1, 16 samt diskriminanten d har af betydning for grafen.

For at kunne skitsere grafen korrekt tegner beregner vi først diskriminanten d, som er givet ved:

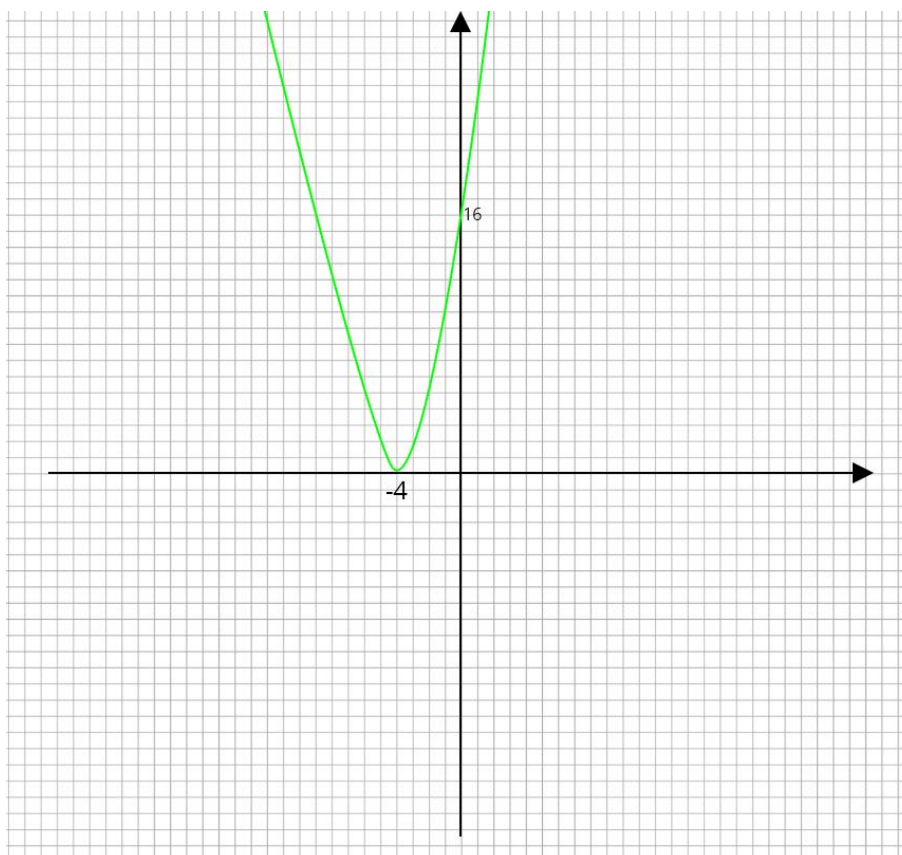
$$d = b^2 - 4ac \Leftrightarrow d = (8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$$

Vi kan derved aflæse at andengradspolynomiet har 1 rødder, da $d=0$. Vi kan nu finde den ene rod:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} \Leftrightarrow x = -4$$

Vi kan derudover se, at den i punktet $(0, f(0))$ har y-værdien 16, da det er skæringspunktet med y-aksen og at 1, altså a, er større end 0, hvilket gør, at den er "glad".

Ud fra disse overvejelser kan vi skitsere grafen:



Længde af vektor i rummet

68. Vi skal bestemme længden af vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi benytter formlen

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$$

69. Vi skal bestemme længden af vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi benytter formlen

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{5^2 + 8^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 64 + 1} = \sqrt{90}$$

70. Vi skal bestemme længden af vektor $\vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$. Vi benytter formlen

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{5^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 36 + 64} = \sqrt{125}$$

Prik/ skalarprodukt

71. Undersøg om vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ er ortogonale. Vi ved, at $\vec{a} \cdot$

$\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$. Vi finder derved den værdi for c, der medfører at skalarproduktet er lig med 0.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 8 = 20 + 12 - 32 = 0. \text{ De to vektorer er altså ortogonale}$$

72. Undersøg om vektorerne $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ og $\vec{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ er ortogonale. Vi ved, at $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$. Vi finder derved den værdi for c, der medfører at skalarproduktet er lig med 0.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 6 = 12 + 24 + 36 = 72. \text{ De to vektorer er altså ikke ortogonale}$$

73. Bestem t så, $\vec{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\vec{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ t \end{bmatrix}$ er ortogonale. Vi ved, at $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

Vi finder derved den værdi for c, der medfører at skalarproduktet er lig med 0.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ t \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot t =$$

$$0 \Leftrightarrow 8 + 24 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{32}{4} = -8. \text{ t skal altså være } -8 \text{ for at de to vektorer er ortogonale.}$$

Chi i anden

74. Givet en undersøgelse om brug af sociale medier med en stikprøve på 598.

Vi skal opstille en nulhypotese om sammenhængen mellem de sociale medier og aldersgrupper og undersøge om denne kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

Vi opstiller nulhypotesen: *Der er ikke sammenhæng mellem brug af de sociale medier og alder.*

Vi foretager herefter en χ^2 – uafhængighedstest.

Vi laver en tabel, som ses herunder. Hvis der ikke er nogen forskel, kan vi forvente at der er relativt set det samme antal mennesker, der bruger sociale medier i mere end 4 timer dagligt, som dem der ikke gør. Vi beregner derfor de forventede som:

$$\frac{\text{samlet antal sandt/falsk}}{\text{samlet antal i alt}} \cdot \text{antal personer i aldersgruppen, fx:}$$

$$\frac{\text{Sandt}}{\text{I alt}} \cdot 13 - 18 \text{ år} \Leftrightarrow \frac{558}{898} \cdot 300 = 186,41$$

Herefter beregner vi χ^2 – værdien, som beregnes:

$$\chi^2 = \frac{(\text{observeret antal} - \text{forventet antal})^2}{\text{forventet antal}}$$

Vi beregner:

	13-18 år	18-23 år	23-30 år	I alt
Sandt	205	230	123	558
Falsk	95	70	175	340
I alt	300	300	298	898
Forventet sandt	186,41	186,41	185,17	558,00
Forventet falsk	113,59	113,59	112,83	340,00
I alt forventet	300,00	300,00	298,00	898,00
$\chi^2 = \frac{(\text{observeret antal} - \text{forventet antal})^2}{\text{forventet antal}}$	1,85	10,19	20,87	
$\chi^2 = \frac{(\text{observeret antal} - \text{forventet antal})^2}{\text{forventet antal}}$	3,04	16,72	34,26	
I alt	4,89	26,92	55,13	Test-størrelse: 86,94

Vi kan nu ved hjælp af Excel aflæse den kritiske værdi ud fra antal frihedsgrader (i dette tilfælde 3) og signifikansniveauet. Vi finder, at den kritiske værdi er 7,81. Da vores teststørrelse 86,94 er større end den kritiske værdi 7,81 forkaster vi nulhypotesen.

75. Givet en klasse, der sammenligner deres karakterer med en anden klasse. Vi skal opstille en nul-hypotese og bedømme hvorvidt den kan forkastes på et 5% signifikansniveau. Vi opstiller nulhypotesen: *De to klassers elever får lige gode karakterer.*

Vi foretager herefter en χ^2 – uafhængighedstest.

Vi laver en tabel, som ses herunder. Hvis der ikke er nogen forskel, kan vi forvente at der er relativt set det samme antal mennesker, der bruger sociale medier i mere end 4 timer dagligt, som dem der ikke gør. Vi beregner derfor de forventede som:

$$\frac{\text{samlet antal } 2.b/2.u}{\text{samlet antal i alt}} \cdot \text{antal personer der fik en given karakter, fx:}$$

$$\frac{2.b}{I \text{ alt}} \cdot 00 - \text{karakter} \Leftrightarrow \frac{558}{898} \cdot 300 = 186,41$$

Herefter beregner vi χ^2 – værdien, som beregnes:

$$\chi^2 = \frac{(\text{observeret antal} - \text{forventet antal})^2}{\text{forventet antal}}$$

Vi beregner:

	0	2	4	7	10	12	I alt
Antal elever 2.b	0	4	10	8	7	3	32
Antal elever 2.u	5	2	3	10	9	2	31
I alt	5	6	13	18	16	5	63
Forventet 2.b	2,54	3,05	6,60	9,14	8,13	2,54	32
Forventet 2.u	2,46	2,95	6,40	8,86	7,87	2,46	32
I alt forventet	5	6	13	18	16	5	63
2.b	2,54	0,30	1,75	0,14	0,16	0,08	
2.u	2,62	0,31	1,80	0,15	0,16	0,09	
I alt	5,16	0,60	3,55	0,29	0,32	0,17	Teststørrelse: 10,09

Vi kan nu ved hjælp af Excel aflæse den kritiske værdi ud fra antal frihedsgrader (i dette tilfælde 5) og signifikansniveauet. Vi finder, at den kritiske værdi er 11,07. Da vores teststørrelse 10,09 er mindre end den kritiske værdi 11,07 accepter vi nulhypotesen og kan altså ikke sige, om 2.b er bedre end 2.u.

Planer i rummet

76. Givet følgende koordinater i rummet: A = (2, 3, 0), B = (8, 6, 0) og C = (5, -1, 3). Vi skal bestemme en ligning for planen a, der indeholder punkterne A, B og C. Vi bestemmer først de to vektorer \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 6-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -1-3 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ For at udregne planens}$$

ligning mangler vi dog en normalvektor. Denne normalvektor får vi ved at udregne krydsproduktet:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 0 \cdot -4 \\ 0 \cdot 3 - 6 \cdot 3 \\ 6 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Vi kan nu}$$

udregne en ligning for planen: $1(x-2) - 2(y-3) + 1(z-0) = 0$

77. Givet følgende koordinater i rummet: A = (3, 4, 1), B = (1, 2, 5), C = (-1, 3, -4). Vi skal bestemme en ligning for planen a, der indeholder punkterne A, B og C. Vi bestemmer først de to vektorer \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-4 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 3-4 \\ -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}. \text{ For at udregne}$$

planens ligning mangler vi dog en normalvektor. Denne normalvektor får vi ved at udregne krydsproduktet:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-5) - 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-4) - (-1) \cdot (-5) \\ -1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 \\ -16-5 \\ 1-4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -21 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Vi kan nu udregne en ligning for planen: } 3(x-3) -$$

$$7(y-4) - 1(z-1) = 0$$

78. Givet følgende koordinater i rummet: A = (0, 3, 5), B = (2, 5, -1) og C = (3, -1, 4). Vi skal bestemme en ligning for planen a, der indeholder punkterne A, B og C. Vi bestemmer først de to vektorer \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-3 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ -1-3 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ For at udregne planens}$$

ligning mangler vi dog en normalvektor. Denne normalvektor får vi ved at udregne krydsproduktet:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - (-6) \cdot (-4) \\ (-6) \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 24 \\ -18 + 2 \\ -8 - 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -26 \\ -16 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}. \text{ Vi kan nu udregne en ligning for planen: } -13(x - 0) +$$

$$8(y - 3) - 7(z - 5) = 0$$

Funktioner med hjælpemidler

79. Givet funktionen $f(x) = x^{1,2} \cdot 4$. Vi skal bestemme $f(136)$.

$$f(136) = 136^{1,2} \cdot 4 = 1453,137$$

80. Givet funktionen $f(x) = 1,02134x + \frac{12}{61} x^2$. Vi skal bestemme $f(294)$.

$$f(294) = 1,02134 \cdot 294 + \frac{12}{61} \cdot 294^2 = 17304,08$$

81. Givet funktionen $f(x) = \frac{258}{3,596 \cdot \cos(0,23^x)}$. Vi skal bestemme $f(12)$. $f(12) =$

$$\frac{258}{3,596 \cdot \cos(0,23^{12})} = 40,58$$

Optimering

82. Bestem det maksimale rumfang en kasse med kvadratisk bund uden låg kan have, når overfladearealet er 500.

Vi ved, at kassens overfladeareal kan beregnes som: $l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h = 500$. Da længden er lig med højden kan dette omskrives til:

$$b^2 + 4 \cdot b \cdot h = 500. \text{ Vi isolerer } h \text{ og får: } h = \frac{500-b^2}{4b} = \frac{125-\frac{1}{4}b^2}{b}.$$

Rumfanget V kan derudover udregnes som: $l \cdot b \cdot h = V \Leftrightarrow b^2 \cdot h = V$. Vi

indsætter udtrykket for h i denne ligning og får: $b^2 \cdot \frac{125-\frac{1}{4}b^2}{b} = V \Leftrightarrow$

$$\frac{125b^2-\frac{1}{4}b^4}{b} = V \Leftrightarrow V(b) = 125b - \frac{1}{4}b^3 \Leftrightarrow V'(b) = 125 - \frac{3}{4}b^2. \text{ Vi løser denne}$$

$$\text{ligning: } 125 = \frac{3}{4}b^2 \Leftrightarrow 500 = 3b^2 \Leftrightarrow b^2 = 166,67 \Leftrightarrow b = 12,91.$$

Bredden er således 12,91. Vi kan herfra udregne højden. $b^2 + 4 \cdot b \cdot h = 500 \Leftrightarrow 12,91^2 + 4 \cdot 12,91 \cdot h = 500 \Leftrightarrow h = 6,45$. Vi udregner derefter den samlede volumen: $12,91^2 \cdot 6,45 = 1075,01$

83. Vi skal bestemme det maksimale rumfang en cylinder uden låg kan have, når overfladearealet er 386. En cylinders rumfang er givet ved:

$$\pi \cdot r^2 \cdot h = V$$

En cylinders overfladeareal kan derudover udregnes som:

$$\pi \cdot r^2 + \pi \cdot 2 \cdot r \cdot h = O$$

Det vil sige:

$$\pi \cdot r^2 + \pi \cdot 2 \cdot r \cdot h = 386. \text{ Vi isolerer } h: h = \frac{386 - \pi \cdot r^2}{2 \cdot r}$$

Vi indsætter h i ligningen ovenfor og får:

$$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{386 - \pi \cdot r^2}{2 \cdot r} = V \Leftrightarrow \pi \cdot \frac{386r^2 - \pi \cdot r^4}{2 \cdot r} = V \Leftrightarrow 193 \cdot \pi \cdot r - \frac{\pi^2 \cdot r^3}{2} = V$$

$$\Leftrightarrow 193 \cdot \pi \cdot r - 4,935 \cdot \frac{r^3}{2} = V \Leftrightarrow V(r) = 193 \cdot \pi \cdot r - 4,935 \cdot \frac{r^3}{2}$$

$$\Leftrightarrow V(r) = 606,327 \cdot r - 4,935 \cdot \frac{r^3}{2} \Leftrightarrow V'(r) = -7,4r^2 + 606,33$$

$$\text{Vi løser ligningen: } 7,4 \cdot r^2 = 606,33 \Leftrightarrow r^2 = \frac{606,33}{7,4} = 81,94$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{81,94} = 9,05$$

Radius er således 9,05. Vi kan herfra udregne højden. $\pi \cdot 9,05^2 + \pi \cdot 2 \cdot 9,05 \cdot h = 386 \Leftrightarrow 257,41 + 56,87 \cdot h = 386 \Leftrightarrow$

$$56,87 \cdot h = 386 - 257,41 = 128,59 \Leftrightarrow h = \frac{128,59}{56,87} = 2,26. \text{ Vi udregner derefter}$$

den samlede volumen:

$$\pi \cdot 9,05^2 \cdot 2,26 = V \Leftrightarrow V = 581,51$$

84. Vi skal bestemme en kugles overfladeareal, når rumfanget er 1150,35. En kugles rumfang og overfladeareal er givet ved:

$$V_{kugle} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \text{ og } O_{kugle} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Vi ved derudover, at $V=1150,35$. Det vil sige:

$$V_{kugle} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 1150,35 \Leftrightarrow \pi \cdot r^3 = 862,75 \Leftrightarrow r^3 = 274,63 \Leftrightarrow r = 6,5$$

Vi kan herfra udregne overfladearealet: $O_{kugle} = 4 \cdot \pi \cdot 6,5^2 = 530,93$

Kuglens overfladeareal er derved 530,93.

Omdrejningsvolumen

85. Givet grafen for funktionen $f(x) = -0,05x^2 + 3$, der med første- og anden aksen afgrænser en punktmængde M i første kvadrant. Vi skal bestemme arealet af punktmængden M . Vi bestemmer først grafens skæring med x -aksen i Geogebra. Vi definerer først $f(x) = -0,05x^2 + 3$ og skriver derefter $Nberegner(f(x) = 0)$ i CAS-vinduet. Geogebra svarer: $x = -7,75, x = 7,75$. Da $x = -7,75$ ikke er i første kvadrant forkaster vi dette svar. Vi kan derfra udregne det bestemte integral mellem 0 og 7,75. $\int_a^b f(x)dx =$

$$\int_0^{7,75} (-0,05x^2 + 3)dx = \left[-\frac{1}{60}x^3 + 3x \right]_0^{7,75} = 15,49 - 0 = 15,49$$

86. Vi skal herefter bestemme rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360 grader om førsteaksen.

Vi bruger formlen: $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$ og indsætter de relevante værdier:

$$V = \pi \cdot \int_0^{7,75} (-0,05x^2 + 3)^2 dx = \pi \int_0^{7,75} (-0,05x^2 + 3)^2 dx.$$

Vi indtaster følgende i Geogebra's CAS-felt: " $\pi * Integral(f(x)^2, 0, 7.75)$ ".

Geogebra svarer: 116,81. Omdrejningslegemet har derved en volumen på 116,81.

87. Givet grafen for funktionen $g(x) = -2,43x^3 + 10x + 1$, der med første- og anden aksen afgrænser en punktmængde M i første kvadrant. Vi skal bestemme arealet af punktmængden M . Vi bestemmer først grafens skæring med x -aksen i Geogebra. Vi definerer først $g(x) = -2,43x^3 + 10x + 1$ og skriver derefter $Nberegner(g(x) = 0)$ i CAS-vinduet. Geogebra svarer: $x = -1,98, x = -0,1, x = 2,08$. Da $x = -1,98$ og $x = -0,1$ ikke er i første kvadrant forkaster vi disse svar. Vi kan derfra udregne det bestemte integral mellem 0 og 2,08. $\int_a^b f(x)dx = \int_0^{2,08} (-2,43x^3 + 10x + 1)dx = [0,61x^4 + 5x^2 + x]_0^{2,08} = 12,34 - 0 = 12,34$

88. Vi skal herefter bestemme rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360 grader om førsteaksen.

Vi bruger formlen: $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$ og indsætter de relevante værdier:

$$V = \pi \cdot \int_0^{2,08} (-2.43x^3 + 10x + 1)^2 dx$$

Vi indtaster følgende i Geogebres CAS-felt:

$$\pi * \text{Integral}((-2.43x^3 + 10x + 1)^2, 0, 2.08).$$

Geogebra svarer: 270,887. Omdrejningslegemet har derved en volumen på 270,887.

Kugleudregning

89. Givet en kugle $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 25$. Vi skal bestemme kuglens centrum samt radius. Vi kender kuglens ligning: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

Vi kan herfra aflæse kuglens centrum til: C(4,-3,1). Vi kan derudover aflæse, at kuglens radius er: $r^2 = 25 \Leftrightarrow r = 5$

90. Givet en kugle i rummet $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 + (z + 10)^2 = 36$. Vi skal bestemme kuglens centrum og beregne hvorvidt punktet A (-3,2, 10, 5) er et punkt i kuglens periferi. Vi kender kuglens ligning: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

Vi kan herfra aflæse kuglens centrum til: C(2,7,-10). Vi skal nu bestemme hvorvidt punktet A (-3,2, 10, 5) er et punkt i kuglens periferi:

Vi indsætter A's værdier i kuglens ligning og får:

$$\begin{aligned} (-3,2 - 2)^2 + (10 - 7)^2 + (5 + 10)^2 &= 36 \Leftrightarrow (-5,2)^2 + (3)^2 + (15)^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow 27,04 + 9 + 225 = 36 \Leftrightarrow 261,04 \neq 36 \end{aligned}$$

Da formlen ikke går op, kan vi konkludere, at punktet A ikke er et punkt i kuglens periferi.

91. Givet en kugle $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 0)^2 = 12,25$. Vi skal bestemme kuglens centrum og beregne hvorvidt punktet A (-2,13, 7, 0) er et punkt i kuglens periferi. Vi kender kuglens ligning:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Vi kan herfra aflæse kuglens centrum til: C(-5, 5, 0). Vi skal nu bestemme hvorvidt punktet A (-2,13, 7, 0) er et punkt i kuglens periferi.

Vi indsætter A's værdier i kuglens ligning og får:

$$\begin{aligned} (-2,13 + 5)^2 + (7 - 5)^2 + (0 - 0)^2 &= 12,25 \Leftrightarrow 7,13^2 + 2^2 + 0^2 = 12,25 \\ &\Leftrightarrow 12,25 = 12,25 \end{aligned}$$

Da værdien på begge sider af lighedstegnet er lig med 12,25 må A være et punkt i kuglens periferi.

Kvartilsæt og boksplot

92. Givet en optælling af skostørrelser blandt folkeskoleelever. Vi skal bestemme kvartilsættene samt X

Vi opskriver alle observationerne sorteret efter størrelse:

38
38
38
38
38
38
38
38
38
38
39
39
40
41
41
41
41
42
42
42
42
43
43
43
43
43
43
43
44
44
44

Vi kan herfra aflæse de forskellige kvartiler: $Q_1 = 38, Q_2 = 2, Q_3 = 43, Q_4 = 44$.

93. Givet en optælling af point fra et udspringsstævne. Vi skal bestemme hvor mange procent, der fik 8 point eller derover. Vi laver et skema over observationerne, hvor vi indtaster: Antal gange hvert pointtal optræder, hvilken procentdel af de samlede point de indeholder og den kummulerede frekvens. Tabellen ser ud som følger:

Pointantal	Antal observationer	frekvens	Kummuleret frekvens
1	3	0,10	0,10
2	3	0,10	0,20
3	3	0,10	0,30
4	5	0,17	0,47
5	0	0,00	0,47
6	1	0,03	0,50
7	5	0,17	0,67
8	4	0,13	0,80
9	4	0,13	0,93
10	2	0,07	1,00
I alt	30	1	

Vi kan ud fra den kummulerede frekvens aflæse, at 80% havde til og med 8. Dvs at 20% fik 8 eller derover.

94. Givet en række slag med en 6-sidet terning. Vi skal bestemme hvor mange procent af slagene der var lige. Vi laver et skema over observationerne, hvor vi indtaster: Antal gange hvert pointtal optræder, hvilken procentdel af slagene de udgør og den vægtede værdi (*antal øjne · antal observationer*). Tabellen ser ud som følger:

Antal øjne	Antal observationer	frekvens	Vægtet
1	2	0,07	2
2	5	0,17	10

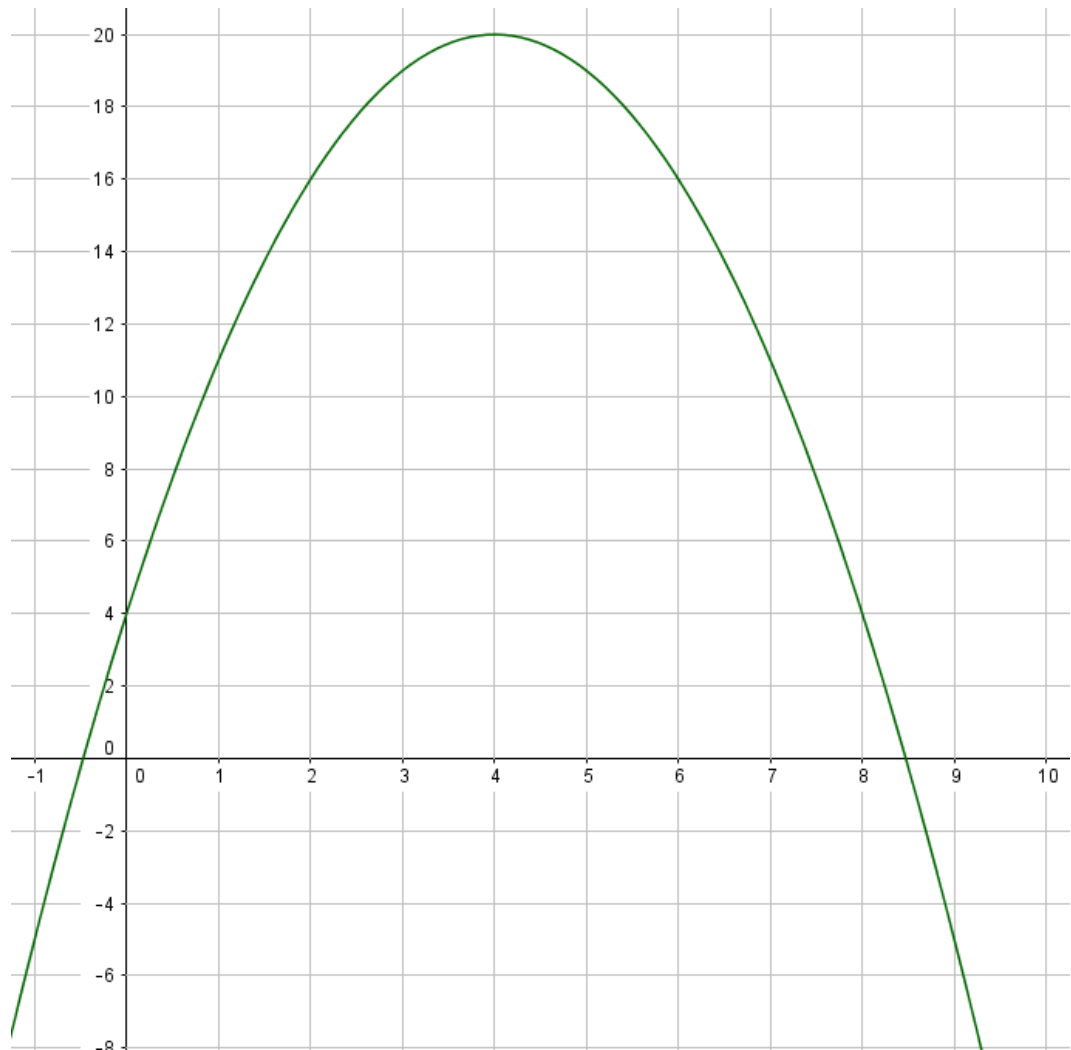
3	5	0,17	15
4	2	0,07	8
5	5	0,17	25
6	11	0,37	66
<hr/>			
I alt	30	1	126

Vi kan derefter addere de lige slag: $0,17 + 0,07 + 0,37 = 0,60$.

Middelværdien kan udregnes som $\frac{126}{30} = 4,2$

Tegn grafer og bestem tidspunktet, hvor

95. Givet funktionen $f(x) = -x^2 + 8x + 4$. Vi skal tegne funktionen og bestemme x-værdierne, hvor $f(x)=16$. Vi tegner grafen i Geogebra:



Vi aflæser x-værdierne til at være $x=2$ og $x=6$.

96. Givet funktionen $f(x) = x^2 - 6x + k$. Bestem den værdi af k , hvor $f(x)$ har én rod. Vi ved, at x har en rod når diskriminanten d $d = b^2 - 4ac = 0$. Vi beregner $d=0$. $(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0 \Leftrightarrow 36 - 4k = 0 \Leftrightarrow 4k = 36 \Leftrightarrow k = 9$. k skal altså være 9 for at der er netop 1 rod. Vi beregner denne rods koordinatsæt: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$. Punktets koordinater er altså $(3,0)$.

97. Givet funktionen $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Bestem koordinatsættene for funktionens rødder. Vi benytter os af diskriminanten d .

$d = b^2 - 4ac \Leftrightarrow d = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$. Da $d > 0$ er der to svar:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 \pm 2}{6} = \begin{cases} x = \frac{-5}{6} \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Bestemmelse af tangent

98. Givet funktionen $f(x) = -2x^2 + 4x + 10$ og linjen $y = -4x + k$. Vi skal bestemme den værdi for k , der medfører at linjen y bliver tangent til funktionen $f(x)$ i punktet $P(2, f(2))$. Vi kender formlen for tangenten til grafen for f i punktet $P(x, x_0)$: $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Vi finder $f(2)$, $f'(x)$ og $f'(2)$. $f(2) = -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 10 = 10$

$f'(x_0) = -4x_0 + 4$ $f'(2) = -4 \cdot 2 + 4 = -4$. Vi kan derefter sætte de to ligninger lig med hinanden: $f'(2)(x - 2) + f(2) = -4x + k \Leftrightarrow -4(x - 2) + 10 = -4x + k \Leftrightarrow -4x + 8 + 10 = -4x + k \Leftrightarrow k = 18$. k skal altså være 18 for at linjen $y = -4x + k$ er tangent til $f(x)$ i punktet $P(2, f(2))$.

99. Givet funktionen $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$ og linjen $y = 9x - k$. Vi skal bestemme den værdi for k , der medfører at linjen y bliver tangent til funktionen $f(x)$ i ét punkt. Vi kender formlen for tangenten til grafen for f i punktet $P(x, x_0)$: $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Vi beregner $f'(x)$. $f'(x) = 4x - 7$. Vi aflæser at 9 i linjens forskrift må være hældningskoefficienten og altså kunne udregnes som: $f'(x) = 9$. $4x - 7 = 9 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$. Så $x=4$.

Vi finder herfra $f(4)$ og $f'(4)$. $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 + 6 = 10$

$f'(4) = 4 \cdot 4 - 7 = 9$. Vi kan derefter sætte de to ligninger lig med hinanden: $f'(4)(x - 4) + f(4) = 9x - k \Leftrightarrow 9(x - 4) + 10 = 9x - k \Leftrightarrow 9x - 36 + 10 = 9x - k \Leftrightarrow 9x - 26 = 9x - k \Leftrightarrow k = 26$. k skal altså være 26 for at linjen $y = 9x - k$ er tangent til $f(x)$.

100. Givet funktionen $f(x) = -3x^2 + 10x - 6$ og linjen $y = -2x + k$. Vi skal bestemme den værdi for k , der medfører at linjen y bliver tangent til funktionen $f(x)$ i ét punkt. Vi kender formelen for tangenten til grafen for f i punktet $P(x, x_0)$: $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Vi beregner $f'(x)$. $f'(x) = -6x + 10$. Vi aflæser at -2 i linjens forskrift må være hældningskoefficienten og altså kunne udregnes som: $f'(x) = -2$.
 $-6x + 10 = -2 \Leftrightarrow -6x = -12 \Leftrightarrow x = 2$. Så $x=2$.

Vi finder herfra $f(2)$ og $f'(2)$. $f(2) = -3 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 6 = 2$
 $f'(2) = -6 \cdot 2 + 10 = -2$. Vi kan derefter sætte de to ligninger lig med hinanden: $f'(2)(x - 2) + f(2) = -2x + k \Leftrightarrow -2(x - 2) + 2 = -2x + k$
 $\Leftrightarrow -2x + 4 + 2 = -2x + k \Leftrightarrow k = 6$. k skal altså være 6 for at linjen $y = -2x + k$ er tangent til $f(x)$.